Задача о машине Атвуда как тест

В.И.Николаев
МГУ им. М.В.Ломоносова, физический факультет

Известная задача о машине Атвуда из раздела «Механика» общего курса физики рассматривается как «учебный полигон». Эта задача может быть использована в качестве простого и наглядного примера при изучении многих тем раздела. К их числу относится и тема, связанная с важнейшим этапом решения физических задач – выбором абстрактной модели. Описан тест, помогающий учащимся – студентам вузов и школьникам старших классов – освоить «технологию» выбора совокупности модельных предположений, на основе которых решается задача.

1. Введение

Задача о машине Атвуда – одна из самых знаменитых в общем курсе физики. Не будет преувеличением сказать, что без нее невозможно обойтись при изучении законов механики [1–6]. Более того, с ее помощью закладываются основы системного подхода при решении физических задач.

Напомним сюжет задачи. Так называемая «машина Атвуда» представляет собой блок, через который перекинута нить, а к концам нити прикреплены два тела (рис. 1). Тому, кто решает задачу в традиционной ее постановке, необходимо найти ускорения тел и натяжения нити на ее концах, выразив искомые величины через задаваемые «параметры задачи».

Автор этих строк на протяжении более чем тридцати лет предлагал «задачу о машине Атвуда» в виде теста различным аудиториям – студентам и преподавателям вузов, школьникам старших классов и учителям физики. После столь длительной «обкатки» можно утверждать, пожалуй, что сама жизнь подсказала, как расставлять акценты в разговоре на тему об этой задаче.

Прежде чем перейти к обсуждению самого теста, остановимся на основных учебных аспектах задачи – тех, которые могут послужить серьезным поводом для формулировки конкретного задания. Это позволит нам лучше увидеть место предлагаемого теста во всем многообразии вариаций на тему о машине Атвуда и оценить его «целебные» свойства.

2. «Учебный полигон»

Перечислим, с краткими комментариями, основные виды учебных заданий, связанных с машиной Атвуда.[1])

---

[1]) Говоря об учебных заданиях, мы не касаемся здесь лабораторных работ физического практикума.

Во-первых, эта задача, в традиционной ее постановке (см. п. 1), – пример задачи на тему «Динамика систем материальных точек». Этот пример можно сделать предельно простым, если принять, что блок и нить невесомы (о прочих упрощающих предположениях обычно умалчивают). Действительно, в этом случае мы будем иметь систему, состоящую всего лишь из двух материальных точек, а исходная система уравнений (в лабораторной системе отсчета, см. рис. 2) представится, как известно, в виде:

$$m_1g - T_1 = m_1a_1, \qquad (1)$$

$$m_2g - T_2 = m_2a_2, \qquad (2)$$

$$a_1 = - a_2, \qquad (3)$$

$$T_1 = T_2. \qquad (4)$$

Здесь искомыми величинами являются ускорения тел (a_1 и a_2) и силы натяжения на концах нитей (T_1 и T_2); «параметры задачи» – массы тел (m_1 и m_2) и ускорение свободного падения (g).

Во-вторых, задачу можно усложнить, комбинируя несколько машин Атвуда – две и более (рис. 3). Так формируется выход на обобщение: взамен системы уравнений (1) – (4) должна возникнуть другая – в полном соответствии с принципами написания таких типовых уравнений, как (1) – (4).

В-третьих, упомянутые принципы написания и сами заслуживают внимания. Каждый учащийся может спросить себя: как называется каждое из уравнений (1) – (4)? Или: следствием чего именно является каждое из исходных уравнений? Применительно к системе уравнений (1) – (4) ответы могут быть, например, такими. Уравнения (1) и (2) – это уравнения движения для первого и второго тел в проекции на вертикальную ось лабораторной системы отсчета. Другая версия: уравнения (1) и (2) – это теорема о движении центра масс в применении, соответственно, к первому и второму телам системы. Далее, уравнение (3) – это уравнение кинематической связи для ускорений тел системы. Наконец, уравнение (4) – … а его как назвать? Есть у него «спецназвание» или нет? Следствием чего оно является? Последний из вопросов – одна из наводящих идей на пути создания теста о машине Атвуда (см. п. 3).

В-четвертых, можно отказаться от предположения о невесомости блока. Тогда, если по-прежнему неизвестными являются ускорения двух тел и силы натяжения на концах нитей, мы получим задачу на тему «Динамика твердого тела». В этой разновидности задачи о машине Атвуда важно проследить не только за «технологией» составления новой исходной системы уравнений, но и за тем, как именно войдет в результаты решения задачи очередная из важнейших величин: мера инертности блока при его вращательном движении – момент инерции I_0.

В-пятых, в механике есть два главных метода решения задач. Один из них основан на законах динамики, другой – на законах сохранения (которые в механике являются следствиями законов динамики). Задачу о машине Атвуда можно решить и вторым методом (как обычно, в соответствующих модельных предположениях). В данном случае это будет метод, основанный на законе сохранения (и изменения) механической энергии. Итоговые результаты («ответы»), полученные двумя названными методами, должны, конечно, совпадать. Тем не менее, полезно обратить внимание на одну возможную «уважительную» причину расхождения «ответов» для ускорений тел a_1 и a_2. Знаки *для каждого* из этих ускорений в «ответах», полученных двумя названными методами, будут различными, если для решения задачи вторым из методов вертикальная ось лабораторной системы координат была выбрана направленной «вверх» (рис. 4), а не «вниз», как прежде (рис. 2). Направление оси x во втором случае «вверх» удобно. Это дает возможность считать ее «осью высот», а значит, mgx – это «потенциальная энергия для тела массы m на высоте x».[2)] Как и в случае решения задачи с помощью законов динамики, здесь возможны варианты. Сравнительно простой: блок невесом (и тогда его кинетическая энергия в ходе вращения равна нулю). Более сложный: момент инерции блока отличен от нуля (а значит, в суммарную механическую энергию системы «два тела + блок + Земля» войдет не равная нулю кинетическая энергия блока).

В-шестых, если одно из тел прикрепить пружиной (жесткости k) к «полу» лаборатории (рис. 5), то получим колебательную систему с одной степенью свободы. Определение периода малых колебаний такой системы T – еще одна типовая задача из раздела «Механика», на сей раз на тему «Колебания». Решая эту задачу, обычно предполагают, что пружина невесома и, кроме того, для нее выполняется закон Гука. Что же касается блока, то, опять-таки, есть два основных варианта: блок либо невесом ($I_0 = 0$), либо «весом» ($I_0 \neq 0$). В каждом из этих вариантов, в свою очередь, есть свои два варианта: найти период колебаний T можно как с помощью законов динамики, так и с помощью закона сохранения механической энергии (для системы «два тела + блок + пружина + Земля»). Как видим, такое разбиение на возможные варианты в данной задаче совершенно аналогично ситуации с задачей о нахождении ускорений для тел a_1 и a_2.

В-седьмых, машину Атвуда можно использовать в так называемых «обратных» задачах [7] – в качестве «строительного материала» при конструировании некоторого «механизма». Сюжет такой задачи в том, что по заданному уравнению кинематической связи (например, для ускорений тел системы) надо «восстановить» саму эту систему тел, связанных нитями и блоками. Тот, кто решает задачу, должен провести фактически «экспертизу». Результаты решения подобных задач обычно бывают весьма впечатляющими: это не только возможные варианты предлагаемых проектов, но и, что гораздо важнее, довольно заметный рост квалификации «экспертов» и … получаемое ими удовольствие.

И наконец, в-восьмых, особого внимания заслуживают и сами модельные предположения, в рамках которых решается та или иная разновидность задачи о машине Атвуда. При внимательном сопоставлении всех шести названных выше видов учебных заданий нетрудно убедиться, что выполнение любого из них возможно лишь при условии предварительного выбора модельных предположений. Это важное утверждение можно сформулировать как лозунг-напутствие: не выбрал модель – не решишь задачу! Зачем именно выбирают каждое очередное

---

[2]) Эти привычные последние слова взяты в кавычки, потому что, строго говоря, mgx – это потенциальная энергия не тела массы m, а системы «тело массы m + Земля».

предположение? – вот главный вопрос для еще одного учебного задания. Этот вопрос можно сделать более «адресным»: *где* именно используется каждое из выбранных модельных предположений в ходе решения задачи? Удобная форма такого задания – тест, который и обсуждается ниже.

3. Тестовое задание

Для теста выберем первое из перечисленных выше учебных заданий. Это будет самый простой вариант теста.

Содержание и весь «сюжет» теста связаны с табл. 1. Эту таблицу надо заполнить, ставя в ее пустых пока клеточках знаки «плюс» или «минус», смотря по обстоятельствам. Левая ее колонка – те самые четыре уравнения, (1) – (4), которые соответствуют первому учебному заданию (п. 2). Следующие пять столбцов таблицы соответствуют пяти модельным предположениям, в рамках которых записаны эти четыре уравнения.

Вот эти предположения:

1) нить невесома,
2) нить нерастяжима,
3) блок невесом,
4) трение в оси блока отсутствует,
5) сопротивление воздуха отсутствует.

«Правила игры»:

если, по мнению решающего задачу, при записи данного уравнения использовано очередное рассматриваемое предположение, то в соответствующей клеточке таблицы надо ставить «плюс»; если же не использовано – ставить «минус».

Таблица 1.

Уравнения	Предположения				
	1	2	3	4	5
$m_1g - T_1 = m_1a_1$ (1)					
$m_2g - T_2 = m_2a_2$ (2)					
$a_1 = - a_2$ (3)					
$T_1 = T_2$ (4)					

Важно заметить, что для тестового задания выбраны лишь пять названных модельных предположений, хотя можно указать немало других, которые считаются выполненными, как принято сейчас говорить, «по умолчанию». Например, предположение о том, что плотность воздуха равна нулю (а вместе с нею равна нулю и архимедова сила, действующая на каждое из тел), или же предположение о том, что блок – это идеальный цилиндр, абсолютно точно насаженный на горизонтальную ось.

Заполняя таблицу, можно спрашивать себя, например, так: изменится ли данное уравнение, если отказаться от очередного рассматриваемого предположения? Если уравнение изменится при отказе от предположения, значит, оно использовано при записи уравнения; если же не изменится, то, выходит, предположение не потребовалось при записи уравнения.

Поясним эту «технологию» на примере, скажем, уравнения (1). Откажемся, например, от первого предположения (а все остальные оставим в силе): будем считать нить весомой. Что изменится в уравнении (1)? Ровным счетом ничего: масса первого тела останется прежней (равной m_1), по-прежнему на него будут действовать сила тяжести Земли (m_1g) и сила упругости левого конца нити (T_1), никаких новых сил не добавится.[3]) Правда, на это можно возразить: как показывает решение задачи о машине Атвуда в случае весомой нити, входящие в (1) две неизвестные величины, a_1 и T_1, будут, вообще говоря, другими, нежели в случае весомой нити. Дело, однако, в том, что в уравнении (1) a_1 и T_1 – это пока «темные лошадки», которые еще подлежат определению. И какими бы они ни оказались в результате решения задачи, *по форме записи* это все равно a_1 и T_1!

По-иному обстоит дело в случае отказа от пятого предположения. Если считать, что воздух оказывает сопротивление движению, то в уравнение движения тела (1) надо добавить силу сопротивления воздуха, действующую на это тело. А ее там, в уравнении (1), нет! Значит, вид уравнения (1) *зависит* от того, принять пятое предположение или же отказаться от него.

4. О типичных ошибках

Основные трудности при выполнении тестового задания и связанные с ними ошибки имеют одну общую причину. По сложившейся «традиции» (в дурном смысле этого слова, почему оно и взято в кавычки), при изучении общего курса физики «не принято» рассматривать задачи, предназначение которых – научить выбирать абстрактную модель. Обычно модель выбирают в результате выполнения приказа, который является составной частью учебного задания. Тон этого приказа – почти угрожающий, как если бы он требовал беспрекословного повиновения. Например (о машине Атвуда): «Нить считать невесомой и нерастяжимой, блок – невесомым, трением в оси блока и сопротивлением воздуха пренебречь».[4]) Попробуй ослушайся!

---

[3]) Не будем сводить задачу к абсурду, ссылаясь на то, что в случае весомой нити на тело массы m будет действовать сила ее гравитационного воздействия: эта сила, как известно, ничтожно мала по сравнению с mg.

[4]) Это фактически цитата. Такой текст, обычно в усеченном виде, можно отыскать во многих задачниках по общему курсу физики.

Если автор-составитель очередной задачи отдает очередной такой приказ, он, вольно или невольно, формирует у «подчиненных» привычку относиться к выбору модели как к чему-то само собой разумеющемуся. С этой привычкой связана и другая: относиться к совокупности *задаваемых* модельных предположений как к постулату, о происхождении которого можно не задумываться.

Сто́ит ли удивляться тому, что в отсутствие навыков выбора абстрактной модели при решении физических задач ошибки, допускаемые учащимися при заполнении таблицы, с трудом поддаются систематизации – столь они разнообразны.

Как показывает практика тестирования разных категорий испытуемых, больше всего ошибок связано с четвертым уравнением. Среди типичных ошибок можно, пожалуй, выделить следующие две.

Нередко утверждают, что уравнение (4) – следствие нерастяжимости нити. Между тем, как это следует из анализа роли сделанных пяти модельных предположений при записи уравнений (1) − (4), именно нерастяжимость нити не используется при обосновании справедливости уравнения (4), тогда как все остальные четыре предположения используются (см. об этом п. 5 и п. 6).

Другая ошибка − в утверждении о том, что будто бы уравнение (4) − следствие третьего закона Ньютона. Обратим в этой связи снимание на то, что в третьем законе Ньютона речь идет о силах *взаимодействия двух тел*, причем силы эти действуют вдоль одной прямой (а *не* вдоль параллельных прямых, как это имеет место для сил T_1 и T_2).

5. «Теорема» о натяжении нити

Здесь слово теорема взято в кавычки по двум причинам. Во-первых, в курсе общей физики, строго говоря, нет такой теоремы: это, скорее, одна из многочисленных конкретных задач из раздела «Механика». Во-вторых, закавыченное слово «теорема» удобно как краткое обозначение.

Сама же «теорема» представляет собой утверждение, эквивалентное равенству (4):

если справедливы модельные предположения, в рамках которых решается задача о машине Атвуда, то сила натяжения нити на ее концах одинакова.

Весь ход доказательства этой «теоремы» вполне можно рассматривать как исследовательскую работу – и вот по какой причине. Наперед неизвестно, какие из перечисленных пяти предположений потребуются при доказательстве, а какие нет. Ведь и в исследовательской работе обычно бывает так: заранее неясно, какая часть имеющейся («априорной», как ее называют) информации об объекте исследования окажется в ходе самого исследования востребованной, а какая – избыточной.

Докажем «теорему» в два этапа.

Сначала докажем, что сила натяжения нити всюду вдоль *прямолинейного* ее отрезка одинакова. С этой целью запишем уравнение движения для центра масс некоторого (любого!) прямолинейного отрезка нити (рис. 6) в проекции на ось x, отказавшись пока от сделанных выше пяти модельных предположений (см. п. 3). Результатом такого «отказа» будет появление в уравнении массы отрезка нити Δm (а вместе с нею и силы тяжести $\Delta m\ g$), а также силы сопротивления воздуха $\Delta F_{сопр.возд.}$ (которая направлена «вверх», если скорость центра масс отрезка направлена «вниз»):

$$T' - T'' + \Delta m\ g - \Delta F_{сопр.возд.} = \Delta m\ a. \qquad (5)$$

(В этом уравнении T' и T'' – силы натяжения соответственно на нижнем и верхнем концах отрезка, a – ускорение его центра масс.) Поскольку же, ввиду сделанных предположений, $\Delta m = 0$ и $\Delta F_{сопр.возд.} = 0$, то из (5) следует:

$$T' = T''. \qquad (6)$$

Тем самым мы доказали, что натяжение нити на каждом ее прямолинейном участке, левом и правом, всюду одинаково. А именно: слева от блока оно всюду равно T_1, а справа от него – всюду T_2.

Докажем теперь, что натяжение нити по разные стороны блока одинаково. Для этого запишем так называемое уравнение моментов для «составного тела» – блока вместе с примыкающим к нему криволинейным отрезком нити. [5])

Уравнение моментов – это аналог уравнения движения. В качестве «оси моментов» выберем ось вращения блока. Как и при записи первоначальной версии уравнения движения (5), откажемся вначале от всех пяти сделанных предположений. Это поможет нам и в этот раз выяснить, какие из них и для чего именно требуются при записи уравнения (4).

В данном случае в левой части уравнения моментов будем иметь сумму *моментов* всех внешних сил, действующих на «составное тело», относительно его оси вращения, а в правой – произведение меры инертности I (*момента инерции*) «составного тела» при его вращательном движении относительно той же оси на его угловое ускорение β:

$$T_2 R - T_1 R - M_{тр\ в\ оси} - M_{сопр.\ возд.} = I\ \beta. \qquad (7)$$

Здесь $M_{тр\ в\ оси}$ и $M_{сопр.\ возд.}$ – это, соответственно, момент сил трения в оси блока и момент сил сопротивления воздуха. Радиус блока R выступает в (7) в роли плеча сил натяжения нити T_1 и T_2 (см. рис. 7).

---

[5]) Этот фрагмент рассказа (как, впрочем, и остальное тоже) написан с таким расчетом, чтобы чтобы и школьник-старшеклассник сумел разобраться во всем сказанном в этой статье, несмотря на используемый здесь иногда «не-школьный» учебный материал.

«Вспомним» теперь о сделанных пяти предположениях. Так как блок и нить невесомы, то I = 0. Поскольку, кроме того, нет ни трения в оси блока, ни сопротивления воздуха, то $M_{\text{тр в оси}} = 0$ и $M_{\text{сопр. возд.}} = 0$. Уравнение (7) преобразуется, таким образом, к виду

$$T_2 . R - T_1 R = 0, \tag{8}$$

откуда и следует уравнение (4). «Теорема» доказана.

6. Итоговая таблица

Если заполнить клеточки табл. 1, следуя сформулированным выше «правилам игры» (п. 3), то получим табл. 2. В этой таблице в отличие от табл. 1, уравнению (4) отведено две строки – по числу этапов доказательства «теоремы». Так яснее видна вся «кухня» обоснования уравнений (1) – (4).

Таблица 2.

Уравнения	Предположения				
	1	2	3	4	5
$m_1g - T_1 = m_1a_1$ (1)	–	–	–	–	+
$m_2g - T_2 = m_2a_2$ (2)	–	–	–	–	+
$a_1 = - a_2$ (3)	–	+	–	–	–
$T_1 = T_2$ (4)	+	–	–	–	+
	+	–	+	+	+

Строки таблицы, соответствующие уравнениям (1) – (3), едва ли нуждаются в дополнительных комментариях. Отметим лишь, что при записи каждого их этих трех уравнений использовано лишь по одному модельному предположению из пяти.

Гораздо сложнее обстоит дело с уравнением (4): как-никак пришлось доказывать «теорему». Как видно из табл. 2, в ходе доказательства два предположения из пяти потребовались по два раза, два других – по одному разу, а одно – ни разу.

Теперь можно, наконец, ответить и на вопрос об уравнении (4), оставшийся без ответа в п. 2: как оно называется? Поскольку у него нет «спецназвания» – придумаем его. По смыслу дела (в соответствии с ходом доказательства «теоремы»), его вполне можно назвать «ранее доказанным утверждением». В самом деле, утверждение о равенстве сил T_1 и T_2 надо сначала доказать, и только лишь после этого его можно включить в исходную систему уравнений.

7. Заключение

Как видим, тест довольно прост в постановочной его части. Для его использования в учебных целях вовсе не обязательно даже иметь персональный компьютер. Вполне можно обойтись мелом и доской или же листом бумаги.

Тест можно использовать и в качестве корректировки знаний учащихся. В таком случае преподаватель (или учитель школы) не должен торопиться с подсказкой: надо дать возможность испытуемым проявить себя, обнаружить свои склонности к привычным для них ответам на привычные учебные вопросы.

По аналогии с описанным тестом на тему о машине Атвуда, можно придумать и другие тесты «про модели», в том числе и по другим разделам общего курса физики (как, впрочем, и школьного курса физики).

Литература

1. С.Э.Фриш, А.В.Тиморева. Курс общей физики, т. 1. М.: ГИТТЛ, 1953, стр. 57.
2. С.Э.Хайкин. Физические основы механики. М.: Физматгиз, 1963, стр. 408.
3. С.П.Стрелков. Механика. М.: Наука, 1965, стр. 85.
4. Д.В.Сивухин. Общий курс физики, т. 1, Механика. М.: Наука, 1974, стр. 191.
5. А.Н.Матвеев. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1986, стр. 113.
6. Р.В.Поль. Механика, акустика и учение о теплоте. М.: Наука, 1971, стр. 75.
7. В.И.Николаев. «Обратные» задачи в курсе физики. Физическое образование в вузах. 1998, Т. 4, № 4, с. 107.

Abstract

The famous task on the so-called “Atwood’s machine” from the division “Mechanics” of the general physics course is considered as “a studies polygone”. This task may be used as a simple and obvious example in the course of study of many subjects

of the division. There is among them the subject connected with one of the most important stage of solution of physical tasks – choosing an abstract model. The test is described which helps students (and pupils) to master the “technology” of choosing a set of model assumption with the help of which the task will be solving.

Перечень рисунков

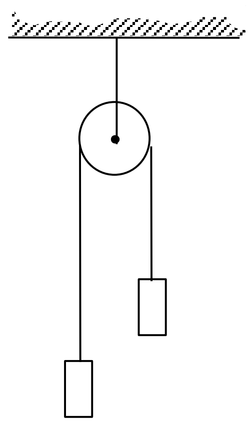

Рисунок 1.

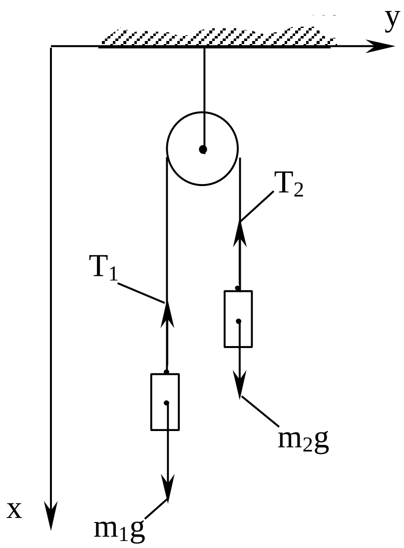

Рисунок 2.

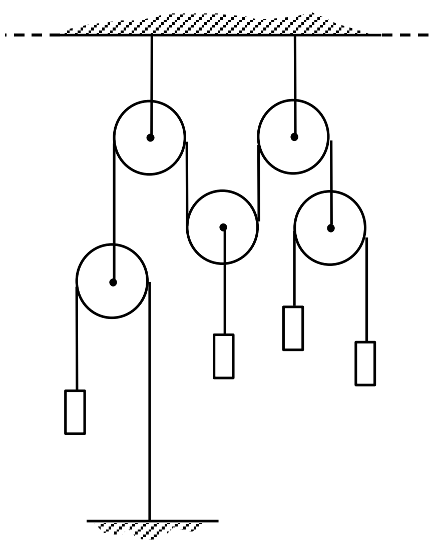

Рисунок 3.

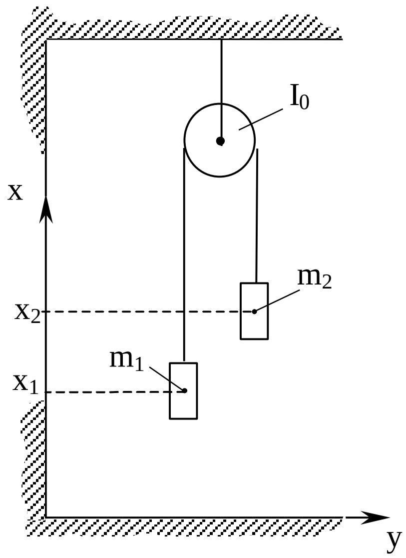

Рисунок 4.

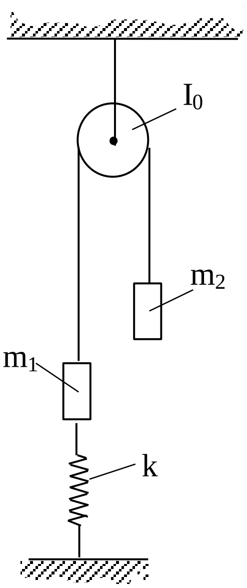

Рисунок 5.

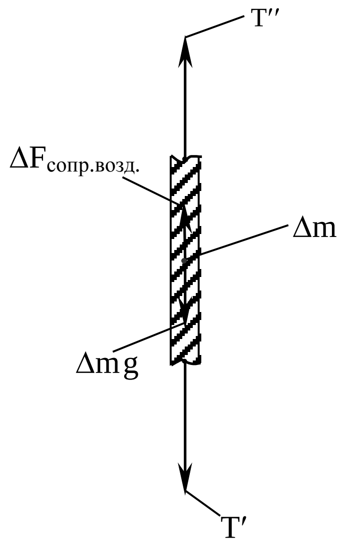

Рисунок 6.

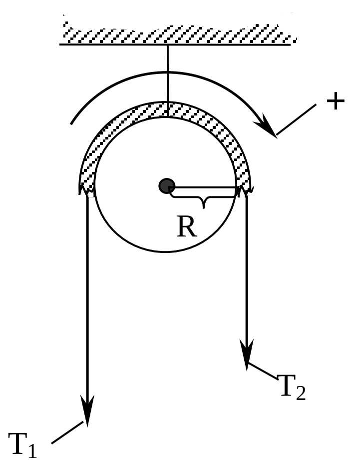

Рисунок 7.